

Au début du XVI^{ème} siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3^{ème} degré $x^3 + px = q$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}$$

A la fin du XVI^{ème} siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3 - 15x = 4$. Il obtient littéralement :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture n'a, *a priori*, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$. Mais Bombelli va plus loin. Il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement : $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

Or, $x = 4$ est bien une solution de l'équation $x^3 - 15x = 4$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes...

1. Introduction

L'équation $x + 7 = 6$ n'a pas de solutions dans \mathbb{N} , mais elle en a dans un ensemble plus grand : \mathbb{Z} ($x = -1$). De même, l'équation $3x = 1$ n'a pas de solutions dans \mathbb{Z} , alors que dans un ensemble plus grand, \mathbb{Q} par exemple, il y en a une : $x = 1/3$. Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans \mathbb{Q} ; il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} pour en trouver.

Bref, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est \mathbb{R} . Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans \mathbb{R} ...

On va donc, dans ce chapitre « construire ? » ou plutôt imaginer un ensemble plus grand que \mathbb{R} dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On l'appellera \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes. Le principal élément de \mathbb{C} sera noté \mathbf{i} (\mathbf{i} comme imaginaire). Le nombre \mathbf{i} est tel que $\mathbf{i}^2 = -1$! L'équation ci-dessus possède alors deux solutions : $x^2 + 1 = 0$ équivaut à $x^2 - \mathbf{i}^2 = 0$ soit $(x - \mathbf{i})(x + \mathbf{i}) = 0$ donc $x = \mathbf{i}$ ou $x = -\mathbf{i}$.

2. Construction du corps des nombres complexes

2.1 Définition

Notons \mathbb{C} l'ensemble des couples de réels :

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$$

Les éléments de \mathbb{C} sont appelés des nombres complexes.

Comme il n'est pas pratique de travailler avec des couples (notations un peu lourdes), nous allons voir (théorème 2.2.) que l'on peut noter les éléments de \mathbb{C} de manière commode et faciliter ainsi les calculs.

2.2. Théorème

L'ensemble \mathbb{C} peut être muni de deux lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ qui prolongent les lois $+$ et \times de \mathbb{R} .

L'ensemble \mathbb{C} contient "une copie" de \mathbb{R} .

Il existe dans \mathbb{C} un élément, noté \mathbf{i} , tel que $\mathbf{i}^2 = -1$.

Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit, de manière unique $z = a + b\mathbf{i}$, où a et b sont des réels.

Les règles de calculs (avec les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$) dans \mathbb{C} seront donc les mêmes que dans \mathbb{R} en remplaçant \mathbf{i}^2 par -1 ou vice versa.

Démonstration (Hors programme)

On muni cet ensemble \mathbb{C} des deux lois de composition interne suivantes :

- la première, notée $+_{\mathbb{C}}$, est définie par :

$$(a, b) +_{\mathbb{C}} (a', b') = (a + a', b + b')$$

- la seconde, notée $\times_{\mathbb{C}}$, est définie par :

$$(a, b) \times_{\mathbb{C}} (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Par exemple, avec $(a, b) = (2, 5)$ et $(a', b') = (-3, 4)$, on a :

$$(2, 5) +_{\mathbb{C}} (-3, 4) = (-1, 9)$$

$$(2, 5) \times_{\mathbb{C}} (-3, 4) = (-26, -7)$$

On vérifie facilement que $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \times_{\mathbb{C}})$ est un corps commutatif (c'est-à-dire : la loi $+_{\mathbb{C}}$ est associative, commutative, admet un élément neutre $(0, 0)$ et tout élément (a, b) admet un opposé $(-a, -b)$; la loi $\times_{\mathbb{C}}$ est associative, commutative, distributive par rapport à la loi $+_{\mathbb{C}}$, admet un élément neutre $(1, 0)$ et tout élément $(a, b) \neq (0, 0)$ admet un inverse.)

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, +, \times) &\rightarrow (\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \times_{\mathbb{C}}) \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

Alors φ est un morphisme de corps. En effet :

$$f(a) +_{\mathbb{C}} f(a') = (a, 0) +_{\mathbb{C}} (a', 0) = (a + a', 0) = f(a + a')$$

$$f(a) \times_{\mathbb{C}} f(a') = (a, 0) \times_{\mathbb{C}} (a', 0) = (aa', 0) = f(aa')$$

$$f(1) = (1, 0)$$

On constate que si les secondes composantes sont nulles, alors les lois $+_{\mathbb{C}}$ et $\times_{\mathbb{C}}$ se comportent comme les lois usuelles $+$ et \times sur les réels.

De plus φ est injectif : $f(a) = f(a') \Rightarrow (a, 0) = (a', 0) \Rightarrow (a - a', 0) = (0, 0) \Rightarrow a = a'$

Donc φ induit un isomorphisme entre les corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $\varphi(\mathbb{R}) = \{(a, 0) \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}\}$.

On peut donc identifier les éléments de \mathbb{R} avec ceux de $\varphi(\mathbb{R})$.

L'ensemble \mathbb{C} contient donc une "copie" de \mathbb{R} .

Par la suite, on note donc simplement $+$ et \times les deux lois de \mathbb{C} et lorsqu'un couple a sa deuxième composante nulle (couples de la forme $(a, 0)$), on le notera tout simplement a :

$$a \stackrel{\text{not}}{=} (a, 0)$$

Cette notation permet de confondre les éléments de \mathbb{R} avec leur copie (éléments de $\varphi(\mathbb{R})$)...

On a de plus : $(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$

Notons : $\mathbf{i} \stackrel{\text{not}}{=} (0, 1)$

Ainsi : $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = -1$

Enfin, pour tous réels a et b on a :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) \times (1, 0) + (b, 0) \times (0, 1)$$

C'est-à-dire, avec les notations ci-dessus :

$$(a, b) = a \times 1 + b \times \mathbf{i} = a + b\mathbf{i}$$

Autrement dit, tout élément de $z = (a, b)$ de \mathbb{C} peut s'écrire $z = a + b\mathbf{i}$.

Cette écriture est unique. En effet :

$$a + b\mathbf{i} = a' + b'\mathbf{i} \Leftrightarrow (a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a - a', b - b') = (0, 0) \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

Ce dernier résultat étant fort utile, mettons-le en évidence :

2.3. Théorème Égalité entre deux nombres complexes

Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels.

$$a + b\mathbf{i} = a' + b'\mathbf{i} \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

En particulier, $a + b\mathbf{i} = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$. On parle alors de nombre complexe nul.

Démonstration du théorème :

Déjà fait ci-dessus. On peut néanmoins en donner une preuve différente.

Montrons, pour commencer, l'équivalence : $a + b\mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

- Déjà, il est clair que si $a = 0$ et $b = 0$ alors $a + b\mathbf{i} = 0$.
- Réciproquement, supposons que $a + b\mathbf{i} = 0$. Montrons qu'alors, nécessairement, $a = 0$ et $b = 0$.

En effet si $b \neq 0$, alors on pourrait écrire : $\mathbf{i} = -\frac{a}{b}$. Le nombre \mathbf{i} serait réel et on ne pourrait avoir $\mathbf{i}^2 = -1$.

Donc $b = 0$. L'égalité $a + b\mathbf{i} = 0$ se réduit à $a + 0\mathbf{i} = 0$ d'où $a = 0$.

On a donc montré que si $a + b\mathbf{i} = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

Considérons maintenant deux nombres complexes $Z = a + b\mathbf{i}$ et $Z' = a' + b'\mathbf{i}$.

- Il est clair que si $a = a'$ et $b = b'$ alors $Z = Z'$.
- Réciproquement, supposons que $Z = Z'$. Alors, on a : $(a - a') + (b - b')\mathbf{i} = 0$

Et d'après ce qui précède, $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$ d'où $a = a'$ et $b = b'$.

Exemple : $Z_1 = 3 + 2\mathbf{i}$ et $Z_2 = 2 - \mathbf{i}$; calculer $Z_1 + Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 + 2Z_2$; $2Z_1 - 3Z_2$; Z_1^2 .

2.4. Définition

Soit $Z \in \mathbb{C}$, $Z = a + ib$ (avec a et b réels). Le réel a s'appelle la partie réelle de Z et b la partie imaginaire.

On note : $a = \operatorname{Re}(Z)$ et $b = \operatorname{Im}(Z)$

Exemples : $Z_1 = 3 + 2i$; $Z_2 = -3i$

On a : $\operatorname{Re}(Z_1) = 3$; $\operatorname{Im}(Z_1) = 2$; $\operatorname{Re}(Z_2) = 0$; $\operatorname{Im}(Z_2) = -3$

Attention ! **La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel !**

Humour : pourquoi la vie des Hommes est-elle complexe ? Car elle possède une partie réelle et une partie imaginaire.

2.5. Définition

Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (où $b \in \mathbb{R}$) s'appelle un imaginaire pur.

L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

2.6. Remarques :

- Dans l'ensemble \mathbb{C} , il n'y a plus la notion d'ordre usuelle⁽¹⁾ ... On ne pourra pas, à ce niveau, comparer un nombre complexe à un autre ou dire s'il est positif ou négatif etc ... (Excepté pour les imaginaires purs où l'on peut définir un ordre naturel comme pour les réels)
- On évitera l'usage abusif du symbole radical $\sqrt{\quad}$ qui reste réservé aux réels positifs.
- Les applications $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sont \mathbb{R} -linéaires. Cela signifie :

$$\forall Z, Z' \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(Z + \lambda Z') = \operatorname{Re}(Z) + \lambda \operatorname{Re}(Z') \text{ et } \operatorname{Im}(Z + \lambda Z') = \operatorname{Im}(Z) + \lambda \operatorname{Im}(Z')$$

3. Représentation géométrique des nombres complexes

Munissons le plan \wp d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

3.1. Principe :

À tout nombre complexe $Z = a + bi$ (avec a et b réels), on peut associer le point $M(a ; b)$.

Cela découle simplement du fait que l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \wp \\ Z = a + bi &\mapsto M(a, b) \end{aligned}$$

est une bijection.

Exemple : à $Z = 2 - 5i$ correspond le point $M(2 ; -5)$ et réciproquement.

3.2. Vocabulaire :

- le point $M(a ; b)$ s'appelle l'image du nombre complexe $Z = a + bi$.
- le nombre complexe $Z = a + bi$ s'appelle l'affixe du point $M(a ; b)$. ("Affixe" est un nom féminin)
- on note souvent $Z = \operatorname{affixe}(M)$ ou $Z = \operatorname{aff}(M)$.

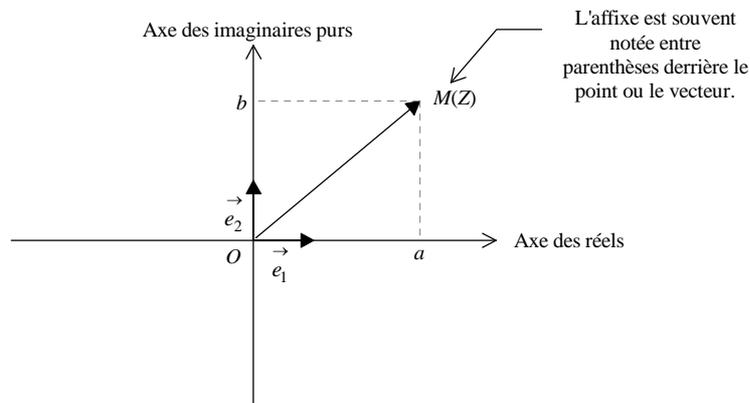
3.3. Autre interprétation très utilisée :

À tout nombre complexe $Z = a + bi$ (avec a et b réels), on peut associer le vecteur $\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$

Ce vecteur \vec{u} s'appelle le vecteur image du nombre complexe Z .

⁽¹⁾ Ce qui ne signifie pas que l'on ne puisse pas ordonner \mathbb{C} . On dit juste que la relation d'ordre usuelle connue sur \mathbb{R} ne se prolonge pas à \mathbb{C} .

Exemple : si $Z = -5 - 2i$ et M est l'image de Z , alors le vecteur $\vec{OM} \begin{vmatrix} -5 \\ -2 \end{vmatrix}$ est le vecteur image de M .



Question : quelle est l'afixe de \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , $-\vec{e}_1$ et $-\vec{e}_2$?

3.4. Application : si Z_A est l'afixe de A et Z_B l'afixe de B , alors l'afixe du vecteur \vec{AB} est $Z_B - Z_A$:

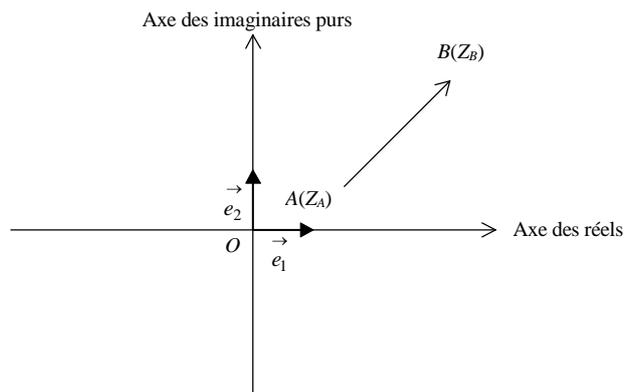
$$\text{aff}(\vec{AB}) = Z_B - Z_A$$

Démonstration : notons $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$. Alors $Z_A = x_A + y_A i$ et $Z_B = x_B + y_B i$.

Nous savons que les coordonnées de \vec{AB} sont : $\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$

Or : $Z_B - Z_A = x_B + y_B i - x_A - y_A i = (x_B - x_A) + (y_B - y_A) i$

Donc l'afixe du vecteur \vec{AB} est $Z_B - Z_A$.



Exemple : l'afixe du vecteur \vec{AB} avec $A(3 ; 5)$ et $B(5 ; 8)$ est $Z = 2 + 3i$.

Ces applications permettent de traduire des problèmes de géométrie en relations entre nombres complexes. Par exemple, on utilisera souvent que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes affixes. Ou encore, on utilisera que l'afixe d'une somme de deux vecteurs est la somme des affixes de ces vecteurs :

$$\text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$$

Plus généralement, l'application $\text{aff} : \wp \rightarrow \mathbb{C}$, où \wp désigne le plan euclidien, est linéaire :

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\text{aff}(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \lambda \text{aff}(\vec{v})$.

4. Conjugué d'un nombre complexe. Inverse d'un nombre complexe non nul

Soit à mettre sous la forme $a + bi$ le nombre complexe suivant : $Z = \frac{1}{2 + 3i}$. Comment faire ?

4.1. Définition

Soient a et b deux nombres réels.

Le nombre complexe conjugué de $Z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{Z} = a - bi$.

Exemples : le conjugué de $9 - 4i$ est $9 + 4i$. Cas particuliers : $\bar{i} = \overline{0 + 1i} = 0 - 1i = -i$; $\bar{7} = 7$.

4.2. Vocabulaire : on dit que Z et \bar{Z} sont des nombres complexes conjugués.

4.3. Remarque : $\text{Re}(Z) = \text{Re}(\bar{Z})$.

4.4. Conséquences Critère pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur)

On a : $Z + \bar{Z} = 2\text{Re}(Z)$ et $Z - \bar{Z} = 2i\text{Im}(Z)$

Et les propriétés suivantes :

$$Z \text{ est réel} \Leftrightarrow Z = \bar{Z} \quad \text{et} \quad Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow Z = -\bar{Z}$$

Démonstration :

Notons $Z = a + bi$ (avec a et b réels). Ainsi :

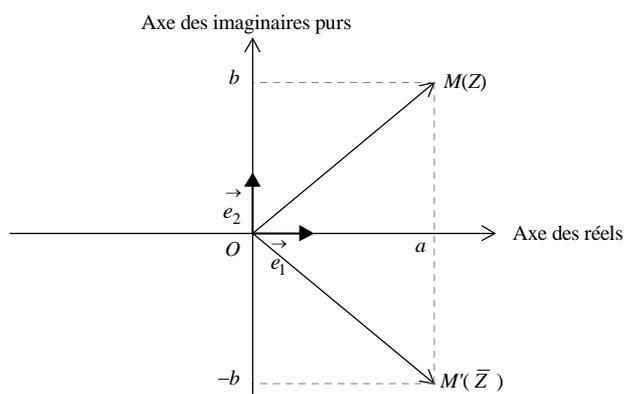
$$Z + \bar{Z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\text{Re}(Z) \quad \text{et} \quad Z - \bar{Z} = a + bi - (a - bi) = 2bi = 2i\text{Im}(Z)$$

On en déduit : $Z \text{ est réel} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z - \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$$Z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow Z + \bar{Z} = 0 \Leftrightarrow Z = -\bar{Z}$$

4.5. Interprétation géométrique du conjugué :

Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels :



4.6. Théorème

Pour tout nombre complexe $Z = a + ib$ (avec a et b réels), la quantité $Z\bar{Z}$ est un nombre réel :

$$Z\bar{Z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$$

Application : pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme $a + b\mathbf{i}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée.

Exemples :

$$\frac{1}{3-4\mathbf{i}} = \frac{3+4\mathbf{i}}{(3-4\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})} = \frac{3+4\mathbf{i}}{25} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}\mathbf{i}$$

$$\frac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$$

$$\frac{7+3\mathbf{i}}{5-2\mathbf{i}} = 1 + \mathbf{i}$$

4.7. Théorème Propriétés de la conjugaison

Pour tous nombres complexes Z et Z' , on a :

$$\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'} \quad \overline{-Z} = -\overline{Z} \quad \overline{ZZ'} = \overline{Z}\overline{Z'} \quad \overline{Z^n} = \overline{Z}^n \quad \overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}} \quad (Z' \neq 0)$$

Démonstration : posons $Z = a + b\mathbf{i}$ et $Z' = a' + b'\mathbf{i}$ (avec a, b, a' et b' réels). Alors :

$$\overline{Z+Z'} = \overline{a+b\mathbf{i}+a'+b'\mathbf{i}} = \overline{(a+a')+(b+b')\mathbf{i}} = (a+a') - (b+b')\mathbf{i}$$

$$\overline{Z} + \overline{Z'} = \overline{a+b\mathbf{i}} + \overline{a'+b'\mathbf{i}} = a - b\mathbf{i} + a' - b'\mathbf{i} = (a+a') - (b+b')\mathbf{i}$$

Donc $\overline{Z+Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$. Les autres égalités se démontrent de façon analogue.

Exemples :

- Le conjugué de $Z_1 = \frac{4-5\mathbf{i}}{3+\mathbf{i}}$ est $\overline{Z}_1 = \frac{4+5\mathbf{i}}{3-\mathbf{i}}$.

- Celui de $Z = \frac{2z^2 - \mathbf{i}}{5z+1}$ est $\overline{Z} = \frac{\overline{2z^2 - \mathbf{i}}}{\overline{5z+1}} = \frac{2\overline{z}^2 + \mathbf{i}}{5\overline{z}+1}$.

Exercice : déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\frac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}}$ soit réel.

Solution : pour $z \neq \mathbf{i}$, on a en posant $z' = \frac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}}$:

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z'} = z' \Leftrightarrow \frac{-\mathbf{i}\overline{z}-1}{\overline{z}+\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}} \Leftrightarrow (\mathbf{i}\overline{z}+1)(\mathbf{i}-z) = (\mathbf{i}z-1)(\overline{z}+\mathbf{i}) \Leftrightarrow -\overline{z} - \mathbf{i}z\overline{z} + \mathbf{i} - z = \mathbf{i}z\overline{z} - z - \overline{z} - \mathbf{i}$$

$$z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2\mathbf{i}z\overline{z} = 2\mathbf{i} \Leftrightarrow z\overline{z} = 1$$

Notons, $z = a + b\mathbf{i}$ (avec a et b réels), ainsi : $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

Or, l'ensemble des points $M(a, b)$ pour lesquels $a^2 + b^2 = 1$ est le cercle de centre O et de rayon 1 (cercle unité)

Comme $z \neq \mathbf{i}$, le lieu des points M tels que $\frac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}}$ soit réel est le cercle unité privé du point d'affixe \mathbf{i} .

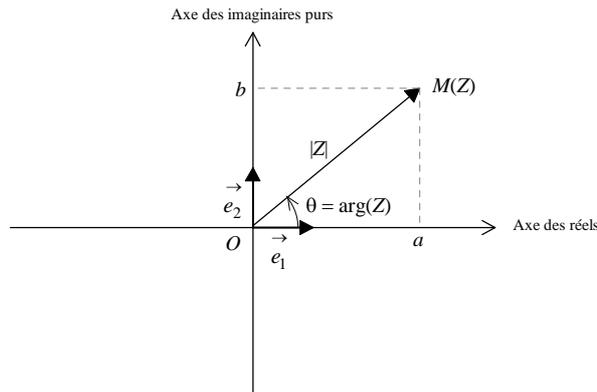
4.8. Application du théorème 4.7. : si un polynôme P , à coefficients réels, admet un nombre complexe Z comme racine alors \overline{Z} est aussi une racine de P puisque, d'après les propriétés de la conjugaison (qui commute avec les exposants, les produits et les sommes) : $P(\overline{Z}) = \overline{P(Z)}$ et donc si $P(Z) = 0$ alors $\overline{P(Z)} = 0$ d'où $P(\overline{Z}) = 0$.

Exemple : on donne $P(x) = x^2 + x + 1$.

On vérifie que les nombres complexes $\mathbf{j} = -\frac{1}{2} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathbf{j}} = -\frac{1}{2} - \mathbf{i} \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont tous deux des racines de P .

5. Module et argument d'un nombre complexe

Voici la figure illustrant les deux définitions suivantes :



5.1. Définition

On appelle module d'un nombre complexe $Z = a + b\mathbf{i}$ la quantité positive $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

En fait, si Z est l'affixe d'un point $M(a ; b)$, le module de Z n'est autre que la distance OM : $OM = |Z|$.

Si Z est l'affixe d'un vecteur $\vec{AB} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, le module de Z représente la distance AB : $AB = |Z_B - Z_A|$.

Exemples :

- Module de $Z = -3 + 4\mathbf{i}$: $|Z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|Z| = 5$. Module de $Z = 9\mathbf{i}$: $|Z| = 9$.
- On donne $Z_A = -1 + 3\mathbf{i}$; $Z_B = 2 - \mathbf{i}$. A est l'image de Z_A ; B est l'image de Z_B ; calculer la distance AB :

$$\text{l'affixe du vecteur } \vec{AB} \text{ est } Z_B - Z_A = 3 - 4\mathbf{i} \text{ donc } AB = |Z_B - Z_A| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

5.2. Remarques :

- $|Z| \geq 0$ pour tout nombre complexe Z .
- $|Z| = 0$ équivaut à $Z = 0$.
- On a également (d'après le théorème 4.6.) $|Z| = \sqrt{Z\bar{Z}}$ ou encore $|Z|^2 = Z\bar{Z}$.
- Si $Z = a + b\mathbf{i}$ est réel ($b = \text{Im}(Z) = 0$), on a $|Z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.
- Le module de $Z = a + b\mathbf{i}$ est toujours supérieur à $\max(|a|, |b|)$. En effet :

$$a^2 + b^2 \geq a^2 \text{ et } a^2 + b^2 \geq b^2$$

Et par passage à la racine carrée : $|Z| \geq |a|$ et $|Z| \geq |b|$

D'où : $|Z| \geq \max(|a|, |b|)$

Exercice : soient $A(0 ; 4)$, $B(3 ; 0)$ et $C(6 ; 8)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Il suffit de calculer les longueurs AB , AC et BC pour voir si des côtés sont égaux.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de voir s'il y a un angle droit.

Application :

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r . Alors $\frac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.

On a :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} = \frac{\bar{u} + \bar{v}}{\bar{u} - \bar{v}} = \frac{u\bar{v} + v\bar{u}}{u\bar{v} - v\bar{u}} = \frac{|u|^2 v + u|v|^2}{|u|^2 v - u|v|^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

Et d'après 4.4. on a : $\frac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur

5.3. Définition

On appelle argument d'un nombre complexe Z **non nul** toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\vec{e}_1, \vec{OM}\right)$.

On le note $\theta = \arg(Z)$.

Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! Si θ est un argument de Z , tout autre argument de Z est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ s'appelle l'argument principal.

On notera par exemple $\arg(Z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou $\arg(Z) = \frac{\pi}{4} \bmod{2\pi}$ pour signifier que $\arg(Z)$ peut être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi égal à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Attention ! Le nombre complexe nul $Z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $\left(\vec{e}_1, \vec{OM}\right)$ ne se définit pas.

Exemples : $\arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$; $\arg(1) = 0 [2\pi]$; $\arg(-1) = \pi [2\pi]$; $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$; $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

Cas particuliers importants :

- un réel strictement positif a un argument nul $[2\pi]$, un réel strictement négatif a un argument égal à $\pi [2\pi]$.

On peut dire : $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = 0 [\pi])$

- un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

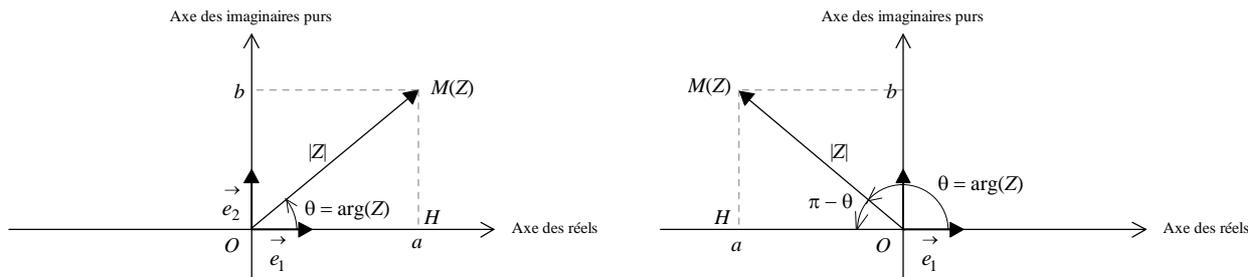
On peut dire : $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (Z = 0 \text{ ou } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} [\pi])$

5.4. Méthode générale pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe non nul :

D'après les relations métriques dans le triangle rectangle OHM (voir figure ci-dessous), on a :

Cas où $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos(\theta) = \frac{OH}{OM} = \frac{a}{|Z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|Z|}$

Cas où $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta) = -\frac{OH}{OM} = -\frac{(-a)}{|Z|} = \frac{a}{|Z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{HM}{OM} = \frac{b}{|Z|}$



Dans les cas où θ est négatif, on raisonne de même, en tenant compte du fait que $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ et $HM = -b$.

Bref, dans tous les cas, nous avons : $\cos(\theta) = \frac{a}{|Z|}$ et $\sin(\theta) = \frac{b}{|Z|}$

Si les cosinus et sinus ci-dessus ont des valeurs remarquables, on peut trouver θ directement à l'aide du cercle trigonométrique, sinon, à l'aide d'une calculatrice, on utilise la règle suivante :

"invcos" $\left(\frac{a}{|Z|}\right)$ donne la valeur absolue de θ
 $\sin(\theta)$ donne le signe de θ

N'oublions pas qu'un angle et son opposé ont le même cosinus. La fonction "invcos" ou "cos⁻¹" de la calculatrice, qui renvoie une mesure d'angle à partir de la donnée du cosinus doit donc faire un choix : celui de renvoyer la mesure de l'angle comprise entre 0 et π .

Exemples :

- Argument principal θ de $Z = -2\sqrt{3} + 2i$.

On a $|Z|^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$ donc $|Z| = 4$.

Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Comme nous avons une bonne connaissance du cercle trigonométrique, nous concluons $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

- Argument principal θ de $Z = 3 - 4i$.

On a $|Z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|Z| = 5$. Nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{3}{5} \\ \sin(\theta) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| \approx 0,9273$ rad. Mais $\sin(\theta)$ est négatif, donc θ est négatif : $\theta \approx -0,9273$ rad, c'est-à-dire : $\theta \approx 53,13^\circ$.

5.5. Théorème Propriétés des modules

Pour tous nombres complexes Z et Z' :

- Module d'un produit : $|Z \times Z'| = |Z| \times |Z'|$. Et en particulier, si λ est réel : $|\lambda Z| = |\lambda| |Z|$.
- Module d'un quotient : $\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ (lorsque $Z' \neq 0$). En particulier, pour tout $Z \neq 0$: $\left| \frac{1}{Z} \right| = \frac{1}{|Z|}$
- Inégalité triangulaire : $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$

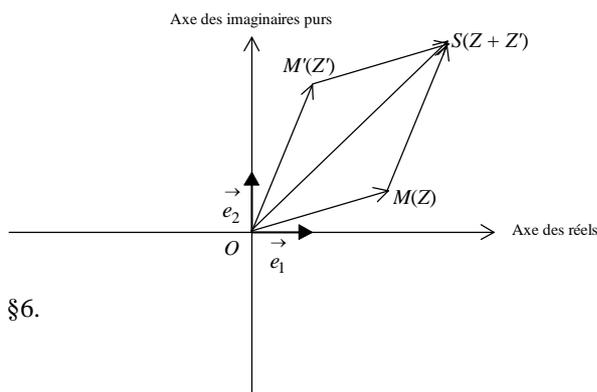
Démonstration :

$$|Z Z'|^2 = Z Z' \overline{Z Z'} = Z Z' \bar{Z} \bar{Z}' = Z \bar{Z} Z' \bar{Z}' = |Z|^2 |Z'|^2 = (|Z| |Z'|)^2$$

Et comme un module est positif : $|Z Z'| = |Z| |Z'|$

La deuxième propriété se démontre de façon analogue.

Quant à l'inégalité triangulaire, la figure suivante est plus parlante que n'importe quelle démonstration. Soient M , M' et S les images respectifs de Z , Z' et $Z + Z'$. On a $OS \leq OM + OM'$ donc $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$.



Une preuve rigoureuse de l'inégalité triangulaire sera donnée au §6.

Complément :

On dit que l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, Z \mapsto |Z|$ est une norme. Cela est dû au fait que l'on a les propriétés suivantes :

- $|Z| \geq 0$ pour tout nombre complexe Z .
- $|Z| = 0$ équivaut à $Z = 0$.
- $|\lambda Z| = |\lambda| |Z|$ pour tout nombre complexe Z et tout réel λ .
- $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$ pour tous nombres complexes Z et Z' .

5.6. Théorème Propriétés des arguments

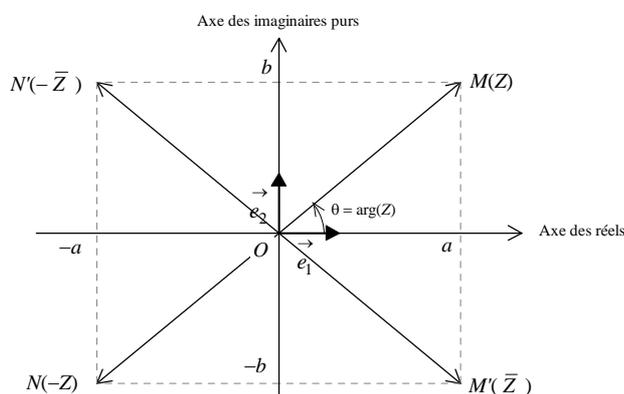
Pour tout $Z \in \mathbb{C}^*$:

$$\arg(\bar{Z}) = -\arg(Z) [2\pi]$$

$$\arg(-Z) = \arg(Z) + \pi [2\pi]$$

$$\arg(-\bar{Z}) = \pi - \arg(Z) [2\pi]$$

Ce théorème s'illustre sur la figure suivante :



Remarque : soit $Z \in \mathbb{C}^*$

- Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors : $\arg(\lambda Z) = \arg(Z) \pmod{2\pi}$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, alors : $\arg(\lambda Z) = \arg(Z) + \pi \pmod{2\pi}$

D'autres propriétés des arguments seront vues plus loin.

Exercice (hors programme) : soit $Z = x + iy$ avec $Z \neq 0$. Démontrer que l'on a :

$$\arg(Z) = \pi \text{ si } Z \in \mathbb{R}_-^* \text{ et } \arg(Z) = 2 \arctan\left(\frac{y}{|Z|+x}\right) \text{ si } Z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^* .$$

Soit C le cercle de centre O et de rayon $|Z|$. Soient I, J et M les points d'affixes respectives $|Z|, -|Z|$ et Z .

Soit θ un argument de Z . On a ainsi : $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$

D'après le théorème de l'angle au centre, on a :

$$2(\vec{JI}, \vec{JM}) = (\vec{OI}, \vec{OM}) \pmod{2\pi}$$

D'où :

$$(\vec{JI}, \vec{JM}) = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$$

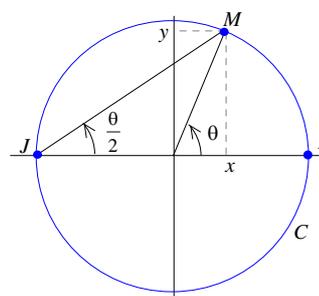
Pour tout $M \in C \setminus \{J\}$, on a :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{|Z|+x}$$

Et si $M = J$, on a :

$$\theta = \pi$$

D'où le résultat.



6. Différentes formes d'écritures des nombres complexes

6.1. Forme trigonométrique

L'écriture $Z = a + bi$ s'appelle **la forme algébrique** de Z (ou encore **forme cartésienne**).

Or, nous avons vu (paragraphe 5) que $a = r \cos(\theta)$ et $b = r \sin(\theta)$ où $r = |Z|$ et $\theta = \arg(Z)$. Le nombre complexe Z peut donc s'écrire : $Z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$; cette écriture s'appelle **une forme trigonométrique** de Z .

6.2. Remarque : le nombre complexe nul $Z = 0$ n'a pas de forme trigonométrique (puisque pas d'argument).

Pour trouver une forme trigonométrique d'un nombre complexe Z non nul il suffit de calculer son module et un argument.

6.3. Théorème

Si $Z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $r = |Z|$ et $\theta = \arg(Z) \pmod{2\pi}$

Démonstration

On a : $|Z|^2 = r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) = r^2$

Or $r > 0$, donc : $|Z| = r$

Soit θ' un argument de Z , alors : $Z = r(\cos(\theta') + i \sin(\theta')) = r \cos(\theta') + i r \sin(\theta')$

Or, par hypothèse : $Z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = r \cos(\theta) + i r \sin(\theta)$

Et d'après le théorème 2.2., $a' + b'i = a + bi$ équivaut à $a' = a$ et $b' = b$ donc :

$$r \cos(\theta') = r \cos(\theta) \text{ et } r \sin(\theta') = r \sin(\theta)$$

D'où : $\cos(\theta') = \cos(\theta) \text{ et } \sin(\theta') = \sin(\theta)$

Ce qui implique : $\theta' = \theta \text{ [} 2\pi \text{]}$

Donc : $\theta = \arg(Z) \text{ [} 2\pi \text{]}$

Exercice : déterminer une forme trigonométrique de $Z = -2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)$.

(Attention, l'écriture ci-contre n'est pas une forme trigonométrique car un module ne peut être négatif !)

Transformons : $Z = 2 \left(-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5} + \pi\right) \right)$

Le module de Z est donc $r = 2$ et un de ses arguments est $\theta = \frac{6\pi}{5}$. (Argument principal : $\frac{6\pi}{5} - 2\pi = -\frac{4\pi}{5}$)

Les propriétés suivantes sur les arguments permettent de multiplier et diviser simplement deux nombres complexes :

6.4. Théorème Propriétés des arguments (bis)

Pour tous nombres complexes Z et Z' non nuls on a :

$$\begin{aligned} \arg(ZZ') &= \arg(Z) + \arg(Z') \text{ [} 2\pi \text{]} & \arg\left(\frac{1}{Z}\right) &= -\arg(Z) \text{ [} 2\pi \text{]} \\ \arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) &= \arg(Z) - \arg(Z') \text{ [} 2\pi \text{]} & \arg(Z^n) &= n \arg(Z) \text{ [} 2\pi \text{]} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On notera l'analogie entre ces relations et les propriétés de la fonction **logarithme**.

Démonstration : utilisons des formes trigonométriques de Z et Z' :

$$Z = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \text{ et } Z' = r' (\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$$

Ainsi : $ZZ' = r r' (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) (\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$

$$ZZ' = r r' [\cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') + i (\sin(\theta) \cos(\theta') + \cos(\theta) \sin(\theta'))]$$

Ce qui, d'après les formules trigonométriques d'addition, donne :

$$ZZ' = r r' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Et comme $r r' > 0$, on en déduit d'après le théorème 6.3. que :

$$|ZZ'| = r r' \text{ et } \arg(ZZ') = \theta + \theta' = \arg(Z) + \arg(Z') \text{ [} 2\pi \text{]}$$

D'où la première relation : $\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z') \text{ [} 2\pi \text{]}$

En spécialisant $Z' = \frac{1}{Z}$ dans cette relation, cela donne :

$$\arg(1) = \arg\left(\frac{1}{Z}\right) + \arg(Z) \text{ [} 2\pi \text{]}$$

Or, $\arg(1) = 0 \text{ [} 2\pi \text{]}$ d'où la seconde relation : $\arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -\arg(Z) \text{ [} 2\pi \text{]}$

En remarquant que $\frac{Z}{Z'} = Z \times \frac{1}{Z'}$ on a d'après ce qui précède :

$$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) + \arg\left(\frac{1}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z') \text{ [} 2\pi \text{]}$$

D'où la troisième relation.

Pour la dernière relation, distinguons trois cas :

- $n > 0$:
$$\arg(Z^n) = \arg(Z \times Z \times \dots \times Z) = n \arg(Z) \quad [2\pi]$$

(Peut se démontrer proprement par récurrence)

- $n < 0$, alors en posant $m = -n > 0$ et en utilisant le cas précédent avec $m > 0$:

$$\arg(Z^n) = \arg\left(\frac{1}{Z^m}\right) = m \arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -m \arg(Z) = n \arg(Z) \quad [2\pi]$$

- Pour $n = 0$, la relation $\arg(Z^n) = n \arg(Z) \quad [2\pi]$ est triviale.

Moralité : pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments.

Exemple :

Soit $Z = 3 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$ et $Z' = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$. Calculer ZZ' .

On pourrait s'en tirer avec la trigonométrie classique, mais les propriétés des modules et des arguments livrent directement le résultat :

$$ZZ' = 6 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

Nous allons voir maintenant une troisième façon, fort commode, de noter les nombres complexes.

Soit f l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$\theta \mapsto \cos(\theta) + \mathbf{i} \sin(\theta)$$

D'après ce que l'on a vu ci-dessus, on a pour tous θ et θ' de \mathbb{R} :

$$f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$$

La fonction f est donc une solution (complexe) de l'équation fonctionnelle $f(u + v) = f(u)f(v)$.

Or, on sait que les solutions de cette équation fonctionnelle sont solutions des équations différentielles du type :

$$y' = ay$$

Déterminons a (qui est ici dans \mathbb{C} puisque f est à valeur dans \mathbb{C}).

En étendant les propriétés de la dérivation aux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , on a f dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + \mathbf{i} \cos(\theta) = \mathbf{i} f(\theta)$$

D'où $a = \mathbf{i}$ et :

$$f(\theta) = f(0) \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$$

Cette constatation rend parfaitement légitime la définition (ou notation) suivante :

6.5. Définition

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

$e^{i\theta}$ désigne donc le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta \pmod{2\pi}$.

Exemples : $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{2i\pi} = 1$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Un nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit alors $Z = r e^{i\theta}$.

Cette écriture est appelée **une forme exponentielle** de Z .

6.7. Remarque : le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$.

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

6.8. Théorème : pour tous θ et θ' de \mathbb{R}

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

La notation exponentielle rend les calculs très simples, par exemple :

$$\text{Si } Z = 3 e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ et } Z' = 7 e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ alors } ZZ' = 21 e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ et } \frac{Z}{Z'} = \frac{3}{7} e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

Exercices :

1) Déterminer la forme algébrique du nombre $Z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$.

Posons $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = \sqrt{3} - i$.

Déterminons les formes exponentielles de Z_1 et Z_2 :

Comme $|Z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_1) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$, on a : $Z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où : $Z_1^4 = 4 e^{i\pi} = -4$

Comme $|Z_2| = 2$ et $\arg(Z_2) = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$, on a : $Z_2 = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$

D'où : $Z_2^3 = 8 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -8i$

Et finalement : $Z = \frac{Z_1^4}{Z_2^3} = -\frac{1}{2} i$

En remarquant que $(1+i)^2 = 2i$, le résultat $(1+i)^4 = -4$ est immédiat.

2) Calculer $(1+i)^{14}$.

Posons $Z = 1 + i$. On a : $Z = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où : $Z^{14} = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{2}} = 128 e^{i2\pi} e^{i\frac{3\pi}{2}} = -128 i$

Énigme : où est l'erreur dans le calcul suivant :

$$e^{2i\pi} = 1$$

En élevant à la puissance x :

$$(e^{2i\pi})^x = 1^x = 1$$

D'où :

$$e^{2i\pi x} = 1$$

En particulier pour $x = \frac{1}{4}$:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = 1$$

D'où :

$$i = 1$$

Réponse : la relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ n'est pas valable si $n = \frac{1}{4}$.

6.9. Une démonstration (hors programme) de l'inégalité triangulaire :

$$\text{Pour tous } Z_1, Z_2 \in \mathbb{C}, |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

Lemme : Pour tous nombres complexes $Z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, on a : $|\operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2)| \leq r_1 r_2$.

Preuve du lemme :

$$|\operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2)| = |\operatorname{Re}(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)})| = |r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)| \leq r_1 r_2.$$

Et, en particulier : $\operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2) \leq r_1 r_2$.

Démonstration de l'inégalité triangulaire :

$$|Z_1 + Z_2|^2 = (Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1 + Z_2}) = (Z_1 + Z_2)(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) = Z_1 \bar{Z}_1 + Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1 + Z_2 \bar{Z}_2 = r_1^2 + (Z_1 \bar{Z}_2 + \overline{Z_1 \bar{Z}_2}) + r_2^2$$

$$|Z_1 + Z_2|^2 = r_1^2 + 2 \operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2) + r_2^2$$

Et d'après le lemme :

$$|Z_1 + Z_2|^2 \leq r_1^2 + 2 r_1 r_2 + r_2^2 \leq (r_1 + r_2)^2$$

Et par croissance de la fonction racine carrée : $|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$

Remarque : cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : à quelle condition a-t-on : $|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2|$?

D'après la démonstration faite ci-dessus, on a :

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z_1 \bar{Z}_2) = r_1 r_2 \Leftrightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0 [2\pi] \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2 [2\pi]$$

D'où :

$$|Z_1 + Z_2| = |Z_1| + |Z_2| \Leftrightarrow O, M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont alignés dans cet ordre}$$

7. Formules de Moivre. Formules d'Euler⁽¹⁾

7.1. Théorème

Formules de Moivre : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \qquad (\cos(\theta) - i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta)$$

$$\text{Formules d'Euler :} \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration : utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

D'où la première formule de Moivre.

⁽¹⁾ Ces formules ne sont plus explicitement au programme mais rien n'interdit un exercice (ou une activité) de les introduire car leur utilisation (qui repose essentiellement sur les propriétés de l'exponentielle complexe qui, elles, sont au programme...) s'avère très pratique dans bien des situations.

La seconde formule est obtenue en remplaçant θ par $-\theta$.

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) + \cos(\theta) - i \sin(\theta) = 2 \cos(\theta)$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) - \cos(\theta) + i \sin(\theta) = 2 i \sin(\theta)$$

D'où les deux formules d'Euler.

7.2. Applications :

1) Linéariser : $\sin^3(\theta)$ et $\cos^4(\theta)$

2) Calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

3) Démontrer que : $x^2 - 2x\cos(\theta) + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$

4) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{it} - 1}\right)$ et $\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}}{e^{it} - 1}\right)$

5) Démontrer que pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$: $e^{2i\theta} = \frac{1 + i \tan(\theta)}{1 - i \tan(\theta)}$

6) Calculer $\sum_{k=0}^n e^{ikt}$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin[(2n+1)x] = \sin x \left(2 \sum_{k=0}^n \cos(2kx) - 1 \right)$$

7) On pose $S = \cos(p) + \cos(q)$ et $S' = \sin(p) + \sin(q)$.

Démontrer que $S + iS' = 2 e^{i\frac{p+q}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. En déduire des expressions de S et S' sous forme de produits.

Procéder de même avec $T = \cos(p) - \cos(q)$ et $T' = \sin(p) - \sin(q)$.

Solutions :

1) On a :

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} = \frac{2i \sin(3\theta) - 6i \sin(\theta)}{-8i} = -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta)$$

$$\cos^4(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}}{16} = \frac{2 \cos(4\theta) + 8 \cos(2\theta) + 6}{16} = \frac{1}{8} \cos(4\theta) + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

2) D'après la formule de Moivre :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

$$\cos^3(\theta) + 3i \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) - i \sin^3(\theta) = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

Et en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)$$

$$\sin(3\theta) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3(1 - \sin^2(\theta)) \sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3 \sin(\theta) - 4 \sin^3(\theta)$$

3) On développe :

$$(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta}) = x^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})x + 1 = x^2 - 2x\cos(\theta) + 1$$

4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{e^{it} - 1} = \frac{1}{e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2ie^{it/2} \sin(t/2)} = \frac{-ie^{-it/2}}{2 \sin(t/2)} = \frac{-i(\cos(t/2) - i \sin(t/2))}{2 \sin(t/2)} = -\frac{i \cos(t/2) + \sin(t/2)}{2 \sin(t/2)}$$

D'où :
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{it} - 1}\right) = -\frac{1}{2} \quad (\text{Résultat indépendant de } t)$$

Et comme :
$$\frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-it}}$$

Il vient :
$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}}{e^{it} - 1}\right) = -\operatorname{Re}\left(\frac{1}{e^{-it} - 1}\right) = \frac{1}{2} \quad (\text{D'après le calcul précédent})$$

5) Pour tout $\theta \neq \frac{\pi}{2} [2\pi]$, on a, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos(\theta)$:

$$\frac{1 + i \tan(\theta)}{1 - i \tan(\theta)} = \frac{\cos(\theta) + i \sin(\theta)}{\cos(\theta) - i \sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

6) Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = e^{\frac{int}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

L'égalité est évidente si $x \in \pi\mathbb{Z}$.

Posons $t = 2x$, ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x] - \sin(-x)}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin(x)} + \frac{1}{2}$$

D'où :
$$\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin(x)} = 2 \sum_{k=0}^n \cos(2kx) - 1$$

D'où le résultat.

7) On a :
$$S + iT' = e^{ip} + e^{iq} = e^{\frac{i(p+q)}{2}} \left(e^{\frac{i(p-q)}{2}} + e^{-\frac{i(p-q)}{2}} \right) = 2 e^{\frac{i(p+q)}{2}} \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

D'où :
$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De même :
$$T + iT' = e^{ip} - e^{iq} = e^{\frac{i(p+q)}{2}} \left(e^{\frac{i(p-q)}{2}} - e^{-\frac{i(p-q)}{2}} \right) = 2i e^{\frac{i(p+q)}{2}} \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

D'où :
$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

8. Nombres complexes et Géométrie

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

8.1. Calculs de distances

Rappelons que si Z_A et Z_B sont les affixes respectives de deux points A et B alors :

$$AB = |Z_B - Z_A|$$

Exemples :

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z - 2| = |z + \mathbf{i}|$$

On introduit $A(2)$ et $B(-\mathbf{i})$, ainsi on a :

$$AM = BM$$

L'ensemble recherché est la médiatrice du segment $[AB]$.

2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z - 3\mathbf{i}| = 2$$

On introduit $C(3\mathbf{i})$, ainsi on a :

$$CM = 2$$

L'ensemble recherché est le cercle de centre C et de rayon 2.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que :

$$|z - 2| = |2z + \mathbf{i}|$$

On introduit $A(2)$ et $B\left(-\frac{\mathbf{i}}{2}\right)$, ainsi : $AM = 2BM$

Il s'agit de la ligne de niveau k (ici $k = 2$) de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$.

Voici une méthode pour la déterminer :

Soit k tel que $|k| \neq 1$.

Les égalités suivantes sont équivalentes : $MA = k MB$

$$MA^2 = k^2 MB^2$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = k^2 \overrightarrow{MB}^2$$

$$(\overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + k \overrightarrow{MB}) = 0$$

Introduisons le barycentre G_1 de $(A, 1)$ et $(B, -k)$ et le barycentre G_2 de $(A, 1)$ et (B, k) .

(Ces barycentres existent bien car $k \neq 1$ et $k \neq -1$)

On obtient alors : $(1 - k) \overrightarrow{MG_1} \cdot (1 + k) \overrightarrow{MG_2} = 0$

Et comme $(1 - k)(1 + k) \neq 0$: $\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$

L'ensemble recherché est donc le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.

8.2. Calculs d'angles

8.2.1. Théorème

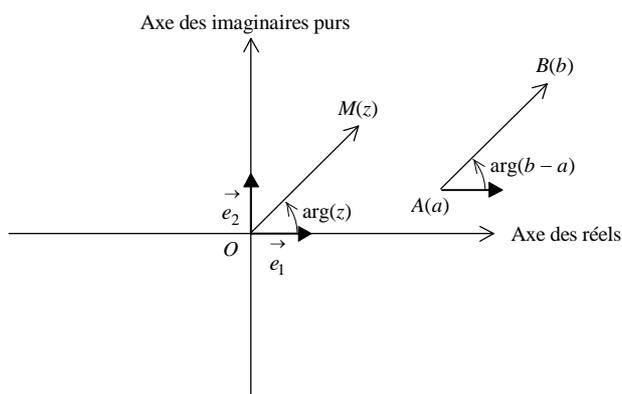
Si A et B sont deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives a et b alors :

$$(\vec{e}_1 ; \vec{AB}) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$$

Démonstration :

Soit $M(z)$ le point tel que : $\vec{OM} = \vec{AB}$

Ainsi : $(\vec{e}_1 ; \vec{AB}) = (\vec{e}_1 ; \vec{OM}) = \arg(z) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$



Exemple :

On donne $A(1)$ et $B(2, i\sqrt{3})$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{e}_1 ; \vec{AB})$.

On a : $b - a = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

D'où : $(\vec{e}_1 ; \vec{AB}) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

8.2.2. Théorème

Si A , B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives a , b et c alors :

$$(\vec{CA} ; \vec{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \quad [2\pi]$$

Démonstration : les affixes des vecteurs \vec{CA} et \vec{CB} sont respectivement $(a - c)$ et $(b - c)$.

D'après 8.2.1. : $\arg(a - c) = (\vec{e}_1 ; \vec{CA}) \quad [2\pi]$ et $\arg(b - c) = (\vec{e}_1 ; \vec{CB}) \quad [2\pi]$

Or, d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$(\vec{e}_1 ; \vec{CB}) - (\vec{e}_1 ; \vec{CA}) = (\vec{CA} ; \vec{CB}) \quad [2\pi]$$

Et d'après les propriétés des arguments :

$$\arg(b - c) - \arg(a - c) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \quad [2\pi]$$

Donc : $(\vec{CA} ; \vec{CB}) = \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \quad [2\pi]$

CAS PARTICULIERS de ce théorème : Il résulte du fait que un argument d'un réel (non nul) est zéro (modulo π) et que celui d'un imaginaire pur (non nul) est égal à $\frac{\pi}{2}$ (modulo π) que pour tous points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tels que $A \neq C$:

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est réel } \Leftrightarrow \text{ les points } A, B \text{ et } C \text{ sont alignés}$$

Et si de plus $B \neq C$:

$$\frac{b-c}{a-c} \text{ est imaginaire pur } \Leftrightarrow \text{ les droites } (CA) \text{ et } (CB) \text{ sont perpendiculaires.}$$

Exemple :

On donne $A(5 + 3i)$ et $B(5 - 8i)$. Le triangle OAB est-il rectangle en O ?

D'après ce qui précède :

$$(\vec{OA}; \vec{OB}) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) [2\pi]$$

Or :

$$\frac{b}{a} = \frac{5-8i}{5+3i} = \frac{1-55i}{34} \notin i\mathbb{R}$$

Donc les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

Extension : $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ étant 4 points du plan, deux à deux distincts, on a :

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$$

En effet, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (\vec{AB}; \vec{CD}) &= \frac{\pi}{2} [\pi] \\ (\vec{AB}; \vec{e}_1) + (\vec{e}_1; \vec{CD}) &= \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \arg(d-c) - \arg(b-a) &= \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) &= \frac{\pi}{2} [\pi] \\ \frac{d-c}{b-a} &\in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Avec des vecteurs, la propriété ci-contre s'écrit :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{\text{aff}(\vec{u})}{\text{aff}(\vec{v})} \in i\mathbb{R}$$

8.3. Liens entre les nombres complexes et certaines transformations du plan

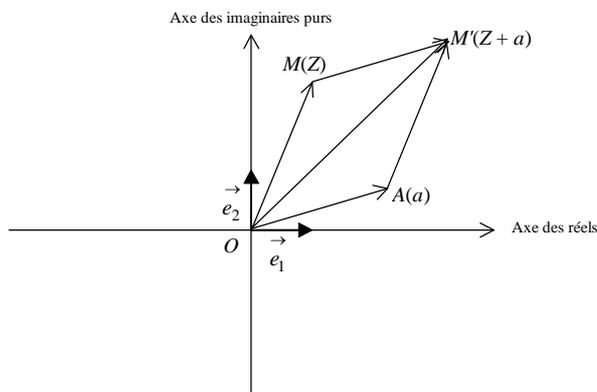
Considérons une fonction f définie sur \mathbb{C} à valeurs dans \mathbb{C} . Nous pouvons associer à cette fonction f la transformation ponctuelle T qui à chaque point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.

8.3.1. Théorème Écriture complexe d'une translation

La translation de vecteur \vec{u} , d'affixe a , transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :

$$z' = z + a$$

"Ajouter un nombre a c'est translater d'un vecteur d'affixe a "



Démonstration :

Dire que M' est l'image de M par la translation de vecteur \vec{u} signifie :

$$\vec{MM'} = \vec{u}$$

Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par : $z' - z = a$

D'où le théorème.

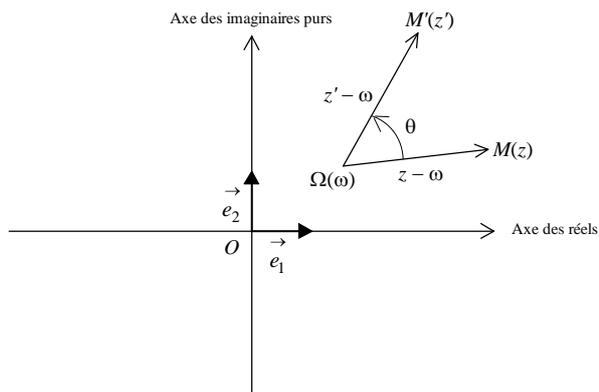
8.3.2. Théorème *Écriture complexe d'une rotation*

La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

"Multiplier par $e^{i\theta}$ c'est faire tourner d'un angle θ "

Illustration :



Démonstration :

Si $M = \Omega$, la relation $z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$ est triviale. Supposons désormais $M \neq \Omega$.

Dire que M' est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ signifie :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'} \right) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

Ce qui se traduit, en termes d'affixes, par :

$$\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

On en déduit :

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta}$$

D'où le résultat.

Cas particuliers :

- Si $\Omega = O$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = e^{i\theta} z$$

- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ (quart de tour de sens direct), alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' - \omega = i(z - \omega)$$

- Si $\Omega = O$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors l'écriture complexe de la rotation devient :

$$z' = iz$$

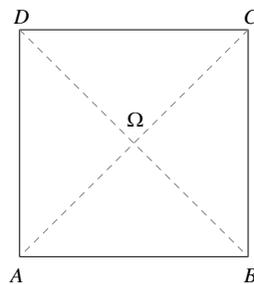
- Cas du **triangle équilatéral**. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C .

$$ABC \text{ est un triangle équilatéral de sens direct} \Leftrightarrow z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

(En effet, c'est équivalent à dire que C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$)

Exemple 1 : on donne deux points distincts $A(a)$ et $B(b)$. On construit le carré $ABCD$ de sens direct.

Quelle est l'affixe ω du centre Ω du carré $ABCD$?



Il suffit de remarquer que B est l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$b - \omega = i(a - \omega)$$

$$\omega(i - 1) = ia - b$$

$$\omega = \frac{b - ia}{1 - i}$$

Exemple 2 : soit $\vec{u}(x, y)$ un vecteur du plan (non nul) et $\vec{v}(x', y')$ tels que $\begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \\ (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Exprimer les coordonnées de \vec{v} en fonction de celles de \vec{u} .

Notons $z = r e^{i\theta}$ l'affixe de \vec{u} et z' celle de \vec{v} .

On a donc : $z' = iz = i r e^{i\theta} = i r (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = r (-\sin(\theta) + i \cos(\theta))$

D'où : $x' = -r \sin(\theta) = -y$ et $y' = r \cos(\theta) = x$

$$\vec{v}(-y, x)$$

Cet exemple montre ce que devient les coordonnées d'un vecteur lorsqu'on le fait "tourner" d'un quart de tour direct.

8.3.3. Théorème Écriture complexe d'une homothétie

L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que :

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

Démonstration :

Dire que M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k signifie :

$$\vec{\Omega M'} = k \vec{\Omega M}$$

Ce qui se traduit bien, en termes d'affixes, par : $z' - \omega = k(z - \omega)$.

Exemple : soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$ du plan associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = -\frac{5}{2}z + 2i$$

Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Montrons que f admet un unique point invariant.

Pour cela on résout l'équation :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega \\ \omega &= -\frac{5}{2}\omega + 2i \\ \omega &= \frac{4}{7}i \end{aligned}$$

La transformation f admet un unique point invariant Ω d'affixe $\omega = \frac{4}{7}i$.

Pour déterminer la nature de f on exprime $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.

On a :

$$\begin{cases} z' = -\frac{5}{2}z + 2i \\ \omega = -\frac{5}{2}\omega + 2i \end{cases}$$

En soustrayant, membre à membre, ces deux égalités, on obtient :

$$z' - \omega = -\frac{5}{2}(z - \omega)$$

On en déduit, grâce à son écriture complexe, que f est l'homothétie de centre Ω et de rapport $k = -\frac{5}{2}$.

8.4. Équation paramétrique d'un cercle

8.4.1. Théorème

Soit C le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R . Soit M un point d'affixe z . Alors :

$$M \in C \Leftrightarrow \text{il existe un réel } \theta \text{ tel que } z = \omega + R e^{i\theta}$$

Remarque : on peut choisir θ dans $[0, 2\pi[$ ou tout autre intervalle semi-ouvert de longueur 2π .

Démonstration : nous aurons besoin du lemme suivant, fort utile :

8.4.2. Lemme :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors :

$$|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \text{il existe un réel } \theta \text{ tel que } z_1 = e^{i\theta} z_2$$

Démonstration du lemme :

Supposons $|z_1| = |z_2|$. Si z_1 et z_2 sont de module nul (donc sont nuls), n'importe quel réel θ fera l'affaire.

Supposons que le module r de z_1 et z_2 est non nul. Notons α_1 et α_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2 .

On a ainsi :
$$z_1 = r e^{i\alpha_1} \text{ et } z_2 = r e^{i\alpha_2}$$

Comme $r > 0$, on a :
$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Il suffit de poser $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ ainsi :
$$z_1 = e^{i\theta} z_2$$

De plus, θ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Réciproquement, s'il existe un réel θ tel que $z_1 = e^{i\theta} z_2$, il est clair que $|z_1| = |z_2|$.

Retour à la démonstration de 8.4.1. :

On a :
$$M \in C \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow |z - \omega| = R$$

Or, d'après le lemme : $|z - \omega| = R \Leftrightarrow$ il existe un réel θ tel que $z - \omega = R e^{i\theta}$

D'où le théorème et on a de plus :
$$\theta = \arg(z - \omega) = (\vec{e}_1 ; \vec{\Omega M}) [2\pi]$$

Exemple : dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère le point $A(a)$ du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\arg(a) = \frac{\pi}{6}$ puis le point B du cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{4}$ tel que $(\vec{e}_1 ; \vec{AB}) = \frac{\pi}{4}$. Quelle est l'affixe b de B ?

On a clairement :
$$a = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

De plus :
$$b = a + \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

D'où :
$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{8} + i \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{8} + i \frac{4 + \sqrt{2}}{8}$$

Remarque :

Si on note (x_Ω, y_Ω) les coordonnées de Ω et (x, y) celles de M , on a :

$$M \in C \Leftrightarrow \text{il existe un réel } \theta \text{ tel que } \begin{cases} x = x_\Omega + R \cos(\theta) \\ y = y_\Omega + R \sin(\theta) \end{cases}$$

8.5. Nombres complexes et barycentre

8.5.1 Théorème

Soit G le barycentre de n points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\sum_{p=1}^n \alpha_p \neq 0$

Notons z_p les affixes des points A_p ($1 \leq p \leq n$). Alors l'affixe z_G de G est donnée par :

$$z_G = \frac{\sum_{p=1}^n \alpha_p z_p}{\sum_{p=1}^n \alpha_p}$$

L'affixe du barycentre est la moyenne (pondérée) des affixes des points

En particulier, si on considère des points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$, on a :

- affixe du milieu de $[AB]$: $\frac{a+b}{2}$
- affixe du centre de gravité du triangle ABC : $\frac{a+b+c}{3}$

Exemple :

ABC est un triangle de sens direct. On construit le point P tel que :

$$(\vec{BC}, \vec{AP}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } AP = BC$$

On construit de même les points Q et R tels que :

$$(\vec{CA}, \vec{BQ}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } BQ = CA$$

$$(\vec{AB}, \vec{CR}) = \frac{\pi}{2} \text{ et } CR = AB$$

Démontrer que le triangle PQR a le même centre de gravité que ABC .

On a donc :

$$p - a = i(c - b)$$

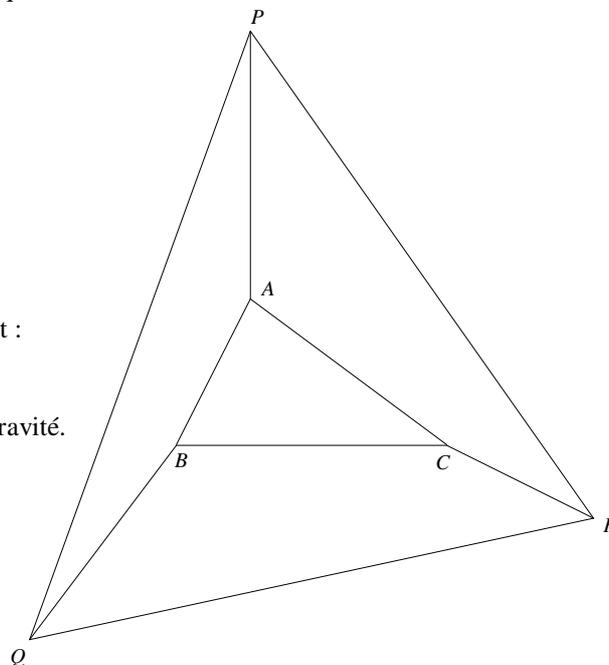
$$q - b = i(a - c)$$

$$r - c = i(b - a)$$

En additionnant membre à membre ces trois égalités, il vient :

$$p + q + r = a + b + c$$

On en déduit que les deux triangles ont le même centre de gravité.



8.6. Quelques lieux de points

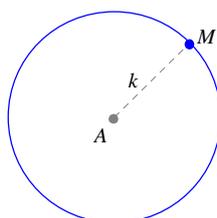
Soient A et B deux points distincts du plan.

- Ensemble des points M tels que $MA = k$:

cercle de centre A et de rayon k si $k > 0$

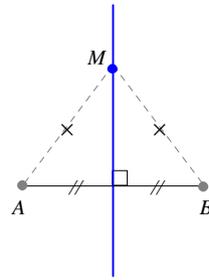
le point A si k est nul

l'ensemble vide si $k < 0$



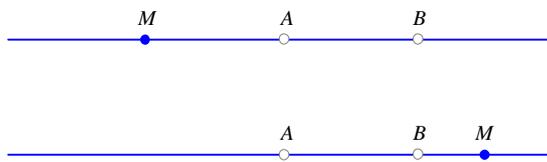
- Ensemble des points M tels que $MA = MB$:

médiatrice du segment $[AB]$



- Ensemble des points M tels que $(\vec{MA} ; \vec{MB}) = 0 [\pi]$:

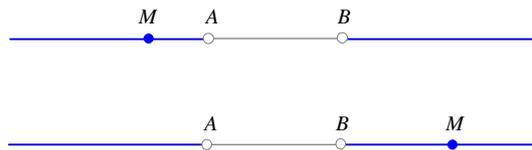
droite (AB) privée des points A et B



Un angle orienté de deux vecteurs n'est défini que si les vecteurs ne sont pas nuls. C'est pourquoi, les points A et B doivent être retirés, le cas échéant, des ensembles ci-contre.

- Ensemble des points M tels que $(\vec{MA} ; \vec{MB}) = 0 [2\pi]$:

droite (AB) privée du segment $[AB]$



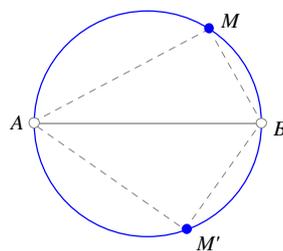
- Ensemble des points M tels que $(\vec{MA} ; \vec{MB}) = \pi [2\pi]$:

segment ouvert $]AB[$



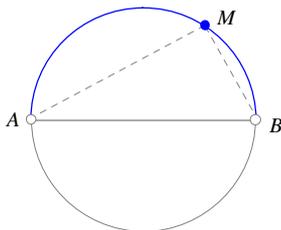
- Ensemble des points M tels que $(\vec{MA} ; \vec{MB}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$:

cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B



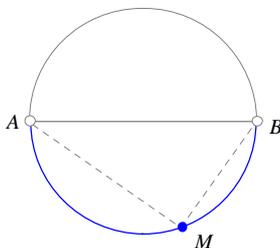
- Ensemble des points M tels que $(\vec{MA} ; \vec{MB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$:

demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit direct



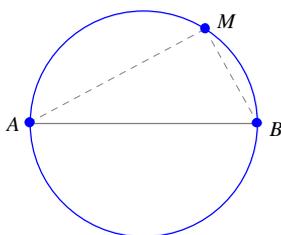
- Ensemble des points M tels que $(\vec{MA} ; \vec{MB}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$:

demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B et tel que MAB soit indirect



- Ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$:

cercle de diamètre $[AB]$



Dans un produit scalaire, les vecteurs peuvent très bien être nuls, c'est pour cela, qu'ici, on ne retire pas les points A et B .

9. Équations du second degré à coefficients réels (activité à compléter)

9.1. ÉQUATIONS DU TYPE $x^2 = a$ où a est un réel et x quantité inconnue.

- Rappeler les solutions de l'équation $x^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.
- On suppose que $a < 0$. Vérifier que $a = (\mathbf{i}\sqrt{-a})^2$. En déduire que l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions complexes que l'on précisera.

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans \mathbb{C} :

- Si $a \geq 0$, ce sont les réels suivants :
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants :

Applications :

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$x^2 = -3$$

$$z^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$z^2 = \cos^2 \theta - 1$$

$$x + \frac{1}{x} = 0$$

9.2. ÉQUATIONS DU TYPE $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ et x quantité inconnue.

Considérons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Rappeler les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) lorsque $\Delta \geq 0$.

Rappelons (voir cours de Première) que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) peut s'écrire de manière équivalente :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- On suppose que $\Delta < 0$. Vérifier que $\Delta = (\mathbf{i}\sqrt{-\Delta})^2$. En déduire que l'équation ci-dessus possède deux solutions complexes que l'on précisera.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) possède deux solutions dans \mathbb{C} :

- Si $\Delta \geq 0$, ce sont les réels suivants :
- Si $\Delta < 0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

À RETENIR : dans \mathbb{C} , on peut toujours obtenir la factorisation suivante :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \text{ où } z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines du polynôme } az^2 + bz + c$$

Applications :

Résoudre, dans \mathbb{C} , les équations suivantes :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$2z^4 + z^2 - 10 = 0$$

10. Équations du second degré à coefficients complexes (Hors programme)

10.1. ÉQUATIONS DU TYPE $z^2 = z_0$ où z_0 est un complexe et z complexe inconnu.

On pose $z_0 = a + \mathbf{i}b = r e^{\mathbf{i}\theta}$ et $z = x + \mathbf{i}y$ où a, b, x et y sont des réels.

Si un argument θ de z_0 est connu, l'équation est facile à résoudre, ses solutions sont :

$$z_1 = \sqrt{r} e^{\mathbf{i}\theta/2} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{r} e^{\mathbf{i}\theta/2}$$

Dans le cas contraire, on procède analytiquement.

D'après les propriétés des modules, on a :

$$\begin{aligned} |z|^2 &= r \\ x^2 + y^2 &= r \end{aligned} \quad (E_1)$$

De plus, l'équation $z^2 = z_0$ s'écrit : $x^2 + 2xy\mathbf{i} - y^2 = a + \mathbf{i}b$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$x^2 - y^2 = a \quad (E_2)$$

Et : $2xy = b \quad (E_3)$

En additionnant (E_1) et (E_2) :

$$2x^2 = r + a$$

En soustrayant (E_1) et (E_2) :

$$2y^2 = r - a$$

On sait, d'après une remarque (5.2.) que : $r \geq |a|$

Donc $r + a$ et $r - a$ sont positifs, les réels x et y existent bien et on choisit leur signe de façon que leur produit soit du signe de b (afin de satisfaire la condition $2xy = b$).

- Si $b \geq 0$, on choisit :

$$z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{r-a}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2 = -\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \mathbf{i}\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

- Si $b \leq 0$, on choisit :

$$z_1 = x_1 + \mathbf{i}y_1 = -\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{r-a}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = x_2 + \mathbf{i}y_2 = \sqrt{\frac{r+a}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{r-a}{2}}$$

On pourra vérifier, *a posteriori*, ces résultats.

Exemple : résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation : $z^2 = 3 + 4\mathbf{i}$

On écrit $z = x + \mathbf{i}y$, ainsi : $x^2 + 2xy\mathbf{i} - y^2 = 3 + 4\mathbf{i}$

Et avec la condition sur les modules ($|z|^2 = 5$), on obtient le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent : $x^2 = 4$ et $y^2 = 1$

Or, d'après la troisième condition $xy = 2$, les réels x et y sont de même signe. On obtient donc :

$$z_1 = 2 + \mathbf{i} ; \quad z_2 = -2 - \mathbf{i}$$

10.2. ÉQUATIONS DU TYPE $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$

On note Δ le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

(Attention, ici $\Delta \in \mathbb{C}$)

Soit δ un complexe tel que : $\delta^2 = \Delta$

(Existe d'après 10.1)

La forme canonique permet alors de conclure :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2}$$

Et en factorisant, on retrouve des formules semblables à celles connues dans \mathbb{R} :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} ; z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Attention, contrairement aux équations dont les coefficients sont des réels, ici les complexes z_1 et z_2 ne sont pas nécessairement conjugués.

Exemple : résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation : $(1 + \mathbf{i})z^2 + \mathbf{i}z - 1 = 0$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = -1 - 4(1 + \mathbf{i})(-1) = -1 + 4(1 + \mathbf{i}) = 3 + 4\mathbf{i}$$

On cherche un complexe δ tel que : $\delta^2 = 3 + 4\mathbf{i}$

D'après l'exemple précédent, $\delta = 2 + \mathbf{i}$ convient. On en déduit nos deux solutions :

$$z_1 = \frac{-\mathbf{i} - (2 + \mathbf{i})}{2(1 + \mathbf{i})} = \frac{-2 - 2\mathbf{i}}{2(1 + \mathbf{i})} = -1 ; z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{-\mathbf{i} + (2 + \mathbf{i})}{2(1 + \mathbf{i})} = \frac{2}{2(1 + \mathbf{i})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

Remarque : on pouvait voir dès le début la racine évidente $z_1 = -1$ et en déduire z_2 avec la relation $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.