Suites : Exercices

exercice 1

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
1. On donne : $u_5 = 7$, $r = 2$.
Calculer u_1, u_{25} et u_{100}.
2. On donne : $u_3 = 12$, $u_8 = 0$.
Calculer r, u_0 et u_{18}.
3. On donne : $u_7 = \frac{7}{2}$, $u_{13} = \frac{13}{2}$.
Calculer u_0.

exercice 2

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison q.
1. On donne : $u_1 = 3$ et $q = -2$.
Calculer u_4, u_8 et u_{12}.
2. On donne $u_3 = 2$ et $u_7 = 18$.
Calculer u_0, u_{15} et u_{20}.

exercice 3

(u_n) est une suite arithmétique telle que $u_2 + u_3 + u_4 = 15$ et $u_6 = 20$.
Calculer son premier terme u_0 et sa raison r.

exercice 4

Déterminer sept nombres impairs consécutifs dont la somme est 7^3.

exercice 5

Existe-t-il une suite telle que les trois premiers termes u_0, u_1, u_2 soient à la fois en progression arithmétique et géométrique ?

exercice 6

Soit (u_n) une suite telle que $u_4 = -4$ et $u_7 = \frac{1}{2}$.
1. On suppose que la suite (u_n) est arithmétique.
 a) Calculer u_3, u_5, u_0.
Plus généralement, exprimer u_n en fonction de u_p et de la raison r, pour n et p entiers quelconques.
 b) Calculer S_5 et S_{10}.
 c) Etudier la convergence de (u_n).

2. Mêmes questions si (u_n) est supposée géométrique.

exercice 7

Une suite arithmétique u de raison 5 est telle que $u_0 = 2$ et, n étant un nombre entier, $\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$
Calculer n.

exercice 8

Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et la somme de leurs carrés est 116.

exercice 9

Une suite géométrique v est croissante et ses termes sont strictement négatifs.
1. Justifier que la raison b de la suite est telle que $0 < b < 1$.
2. On suppose que $v_1 v_3 = \frac{4}{9}$ et $v_1 + v_2 + v_3 = -\frac{19}{9}$.
Calculer v_1, v_2, v_3 et b.

exercice 10

Calculer les sommes S et S'.
S = 2 + 6 + 18 + ... + 118 098

$$S' = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{59049}$$

exercice 11

Une horloge sonne toutes les heures.
Quel est le nombre de sons de cloche entendus en 24 heures ?

exercice 12

Cinq personnes se trouvent dans une pièce. L'une d'entre elles remarque que leurs âges sont en progression arithmétique. Sachant que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année où se passe cette histoire (à savoir 1980) et qu'à elles toutes, les personnes totalisent 90 années, quel est l'âge de chacune des personnes ?

exercice 13

La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

exercice 14

Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 1985, il coûtait alors 150F. Quel est son prix à la bourse aux livres de 1990 ? de 1995 ?

exercice 15

On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la portion de parabole d'équation $y = -x^2 + 1$ et les axes du repère (voir figure).
Pour cela, on divise [0,1] en n parties égales et l'on remarque que A est comprise entre l'aire A_n de la région délimitée en noir et l'aire A'_n de la région délimitée en rouge.

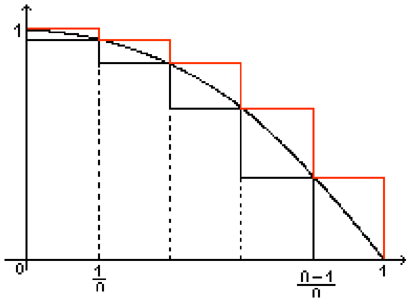
a) Calculer A_n et A'_n en fonction de n.

(On admettra la formule : $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

b) Calculer A_n et A'_n pour n = 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^{10} à l'aide d'une calculatrice.

Quel résultat semble se dégager ?

c) Prouver ce résultat et en déduire la valeur de A.

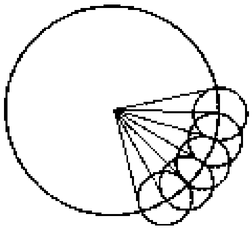


exercice 16 - Une rosace

On partage un cercle de rayon 1 en n parties égales et on dessine une rosace comme sur la figure ci-après .
Soit l_n la somme des périmètres des petits cercles tracés et soit s_n la somme des aires des petits disques tracés.
On se demande si :

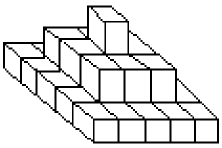
- l_n va tendre vers 0 car les cercles sont de plus en plus petits ;
- l_n va tendre vers $+\infty$ car il y a de plus en plus de cercles ;
- l_n va tendre vers une valeur finie.

Trouver le bon résultat par le calcul et faire le même travail pour s_n.
(On admettra que pour $x \geqslant 0,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$).



exercice 17 - La pyramide de Saqqarah

On considère une pyramide à n étages et on appelle p_n le nombre de cubes qui la composent.

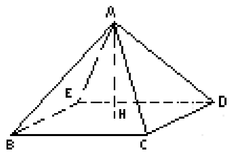


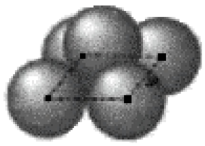
a) Trouver une formule donnant p_n comme une somme de n carrés entiers.
Soit $S_n = 0 + 1 + 4 + 9 + ... + n^2$.
b) Exprimer p_n en fonction de S_{2n-1} et S_{n-1}.

c) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3. Trouver un polynôme P de degré 3,
tel que $P(n) = S_n$ pour $n \leqslant 3$.
On admet que pour tout n, $P(n) = S_n$.
d) En utilisant b, exprimer p_n sous forme de polynôme.
e) Application numérique :
la pyramide de Saqqarah à 6 étages. Calculer p_n.

exercice 18 - Empilements de billes

a) Soit ABCDE une pyramide à base carrée ayant toutes ses arêtes égales (AD = a).
Calculer la hauteur AH de cette pyramide.





b) On empile des billes de même rayon R de telle sorte que chaque bille repose sur quatre billes dont les centres définissent un carré de côté 2R. Le niveau 1 contient une bille, le niveau 2 contient quatre billes. Quel est le nombre de billes du niveau 3, du niveau 4, du niveau n (n entier naturel) ?
c) On note h_n la hauteur d'un empilement à n niveaux. Démontrez que (h_n) est une suite arithmétique et donnez le premier terme et la raison.

exercice 19

Montrer que chaque suite proposée a pour limite ℓ.

a) $u_n = \dfrac{1}{n+3}$, $\ell = 0$ et $v_n = \dfrac{2}{n^2}$, $\ell = 0$
b) $u_n = n^2 + 1$, $\ell = +\infty$ et $v_n = 2n^3$, $\ell = +\infty$
c) $u_n = -\sqrt{n}$, $\ell = -\infty$ et $v_n = -n - 4$, $\ell = -\infty$
d) $u_n = \dfrac{2}{n^2+5}$, $\ell = 0$ et $v_n = n + \dfrac{1}{n}$, $\ell = +\infty$
e) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n}$, $\ell = -\infty$ et $v_n = \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n}$, $\ell = 0$
f) $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$, $\ell = 2$ et $v_n = -n - 4$, $\ell = -\infty$

exercice 20

Montrer que les suites proposées tendent vers une limite à préciser.

a) $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+7}$; $v_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$; $w_n = \dfrac{n^2-1}{2n^2+n}$

b) $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}}{3n^2+4}$; $v_n = -n^2-n+1$; $w_n = \dfrac{-2n+1}{4n+1}$

c) $u_n = (2n+1)^2$; $v_n = -n-\dfrac{3}{n}$; $w_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)}$

exercice 21

Etudier d'abord la limite de la suite géométrique (u_n), puis celle de la suite (v_n).

a) $u_n = 2^n$; $v_n = 1+\dfrac{1}{2^n}$

b) $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $v_n = \dfrac{1}{7}n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

c) $u_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$; $v_n = 7+\dfrac{5}{3}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$

d) $u_n = -5^n$; $v_n = 2-5^n$

exercice 22

Montrer que la suite (u_n) satisfait la relation (R), puis en déduire la limite de cette suite.

a) $u_n = \dfrac{\cos n}{n+1}$; (R) : $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

b) $u_n = \sin(2n)+n$; (R) : $|u_n| \geqslant n-1$

c) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$; (R) : $|u_n| \leqslant \dfrac{n+1}{n^2+1}$

d) $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$; (R) : $|u_n| \geqslant \dfrac{n-1}{3}$

exercice 23

a) Vérifier que la suite $\left(\dfrac{4^n}{n^2}\right)$ est croissante.

b) En déduire que $\left(\dfrac{4^n}{n}\right)$ tend vers $+\infty$.

c) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{4^n+n}{4^n+2n}\right)$.

exercice 24

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier le comportement à l'infini de la suite (u_n), en utilisant des majorations ou des minorations.

a) $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$

b) $u_n = \frac{2n+3}{3n-4}$

c) $u_n = \frac{(-1)^n \sin n}{n^2-1}$

d) $u_n = \frac{n^2+4}{n-1}$

e) $u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n}$

f) $u_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n}$

exercice 25

En utilisant les opérations sur les limites, déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n) dans chacun des cas ci-dessous:

a) $u_n = \frac{4n-1}{n+4}$

b) $u_n = \frac{2n^2-5n+3}{n+4}$

c) $u_n = \frac{n+3}{n^2+4}$

d) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{n+1}$

e) $u_n = \frac{2^n+n}{3^n(n+1)}$

exercice 26

Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2+12}$.

a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite. Quel semble être la limite de (u_n) ?

b) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2-4$ est géométrique.

En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

exercice 27

Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}$.

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Montrer par récurrence que si $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
c) Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$.
Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n . Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout entier n. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
d) Montrer que pour tout n, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
En déduire que pour tout n, $|u_n - 2| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.
Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

exercice 28

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \geqslant -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$
a) Prenons $u_0 = 0$. Constater, à l'aide d'une calculatrice, que (u_n) semble converger vers une valeur *l* dont on donnera une valeur approchée)
Vérifier la même propriété en choisissant une autre valeur initiale u_0.
b) Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?
c) Nous allons maintenant prouver que (u_n) converge bien vers ℓ.
Montrer que $(u_{n+1} - \ell)(u_{n+1} + \ell) = u_n - \ell$ pour tout entier n.
En déduire que $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{|u_n - \ell|}{\ell}$ puis que $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{|u_0 - \ell|}{\ell^n}$ et conclure.