Les algorithmes d'approximations

Objectifs :
L'élève sera capable de résoudre des problèmes informatiques faisant appel à :
- Des algorithmes d'optimisations et d'approximations,
- Des algorithmes de résolution de l'équation F(x) = 0.

I. Problème d'optimisation :

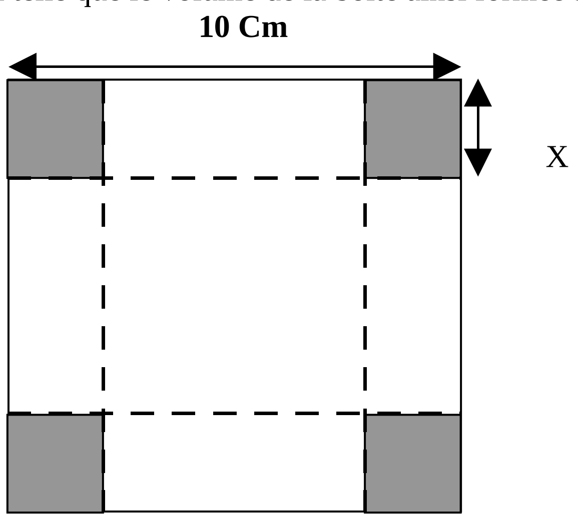
a) Introduction :

Les algorithmes d'optimisation cherchent à déterminer le jeu de paramètres d'entrée d'une fonction donnant à cette fonction la valeur maximale ou minimale. (Encyclopédie libre Wikip_dia)

Cette valeur est appelée valeur optimale qui est une valeur approchée de l'optimum global (idéal).

Activité : Dans une feuille de carton carrée de **10 cm** de coté, on découpe aux quatre coins quatre carrés de coté **X** de telle façon qu'en relevant les quatre bords restants, on obtienne une boite de forme parallélépipédique.

On veut trouver la valeur de **X** telle que le volume de la boite ainsi formée soit maximum.



b) Spécifications et algorithmes du problème :

1. Spécification du programme principale :

- **Résultat :** Afficher la valeur de **X** pour laquelle le volume est maximum.
- **Traitements :** Il faut calculer la valeur approchée de **X** qui varie dans l'intervalle **[0..5]** ou le volume est maximum en utilisant une fonction **Valeur_X**

Le volume du parallélépipédique = surface de base * hauteur = **(10 - 2 * X) * (10 - 2 * X) * X**

- **Données :** Il faut saisir la valeur du pas pour laquelle x varie dans son intervalle.

2. Algorithme du programme principal :

0) **Début** Volume_Max
1) Ecrire ("Donner la valeur du pas : "), Lire (P)
2) X ← **Valeur_X** (P)
3) V ← (10 - 2 * X) * (10 - 2 * X) *
4) Ecrire ("La meilleur solution avec ", V)
5) **Fin** Volume_Max

Tableau de déclaration des Objets

Objets	Type/Nature
P, X, V	Réel
Valeur_X	Fonction

3. **Spécification de la fonction Valeur_X :**
    - **Résultat :** Déterminer la valeur de **X**
    - **Traitements :** La solution comporte un traitement répétitif pour parcourir les valeurs du coté des carrés à découper avec un pas **Pf** donné. Pour chaque valeur de variation **(Xv)**, on calcule le volume **(Vv)**, enfin sortir de la boucle avec **Xv** pour laquelle le volume **Vv** est maximum. **Xv** varie entre **0** et **5**.

    Cette fonction admet un seul paramètre formel **Pf.**

4. **Algorithme de la fonction Valeur_X :**

```
0) Début fonction Valeur_X (Pf : réel) : Réel
1) [Xmax ← 0, Vmax ← 0, Xv ← 0, Vv ← 0]
   Répéter
       Xv ← Xv + Pf
       Vv ← (10 - 2 * Xv) * (10 - 2 * Xv) * Xv
       Si (Vv > Vmax) Alors
             Vmax ← Vv
             Xmax ← Xv
       Finsi
   Jusqu'à (Xv > 5)
2) Valeur_X ← Xmax
3) Fin Valeur_X
```

Tableau de déclaration des objets locaux

Objets	Type/Nature
Xv, Xmax, Vv, Vmax	Réel

II. Problème d'approximation :

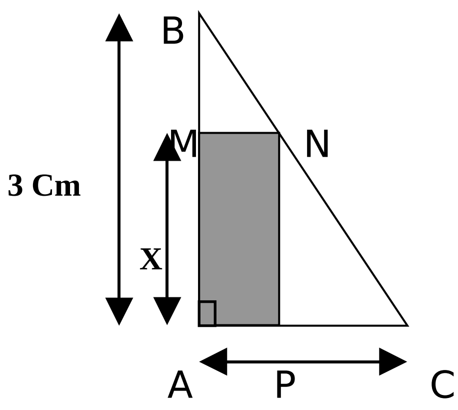
a) Introduction :

Les algorithmes d'approximation, peuvent être utilisés pour déterminer les valeurs approchées de la solution de certains problèmes dont on ne peut pas déterminer la valeur exacte de la solution.

Activité : Dans un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 3 Cm et AC = 2 Cm, on place un point M sur le segment [AB] tel que AM = X.

N est la projection de M sur (BC) parallèlement à (AC).

P est la projection de N sur (AC) parallèlement à (AB).



On veut trouver la valeur (ou les valeurs) de **X** tel que **AMNP** Ait pour aire **1 Cm²**

b) Spécifications et algorithmes du problème :

1. **Spécification du programme principale :**
    - **Résultat :** Afficher la valeur de **X** pour laquelle l'aire du rectangle est égale à 1 Cm².

- **Traitements :** Pour résoudre ce problème il faut savoir comment calculer la surface du rectangle AMNP en fonction de X. X représente la longueur du rectangle, supposant que Y représente la largeur de ce rectangle, donc la surface égale à X * Y

Maintenant on doit trouver une façon comment écrire Y en fonction X pour rendre l'équation de calcul de surface à un seul inconnu.

L'aire du triangle ABC = AB * BC / 2 = 2 * 3/2 = 3 Cm^2

L'aire du triangle **ABC** = aire du triangle **PCN** + aire du triangle **MNB** + aire du rectangle **AMNP = 3**

L'aire du triangle **ABC =** (X*(2–Y)/2)+(Y*(3–X)/2)+(X*Y) = X–Y/(2*X)+3/(2*Y)-Y/(2*X)+X*Y = 3

= X + 3/2Y = 3

D'où Y = 2-2/3*X

On obtient : aire du rectangle **AMNP** = X * Y = X * (2-2/3*X) = 1

= 2*X - 2/3*X^2 = 1

Donc Il faut calculer la valeur approchée de **X** pour que aire du rectangle **AMNP** soit très proche de 1, en utilisant une fonction **Valeur_X**

- **Données :** Il faut saisir la valeur du pas pour laquelle pour calculer à chaque variation de **X** la valeur de l'aire.

2. Algorithme du programme principal :

0) **Début** Rectangle
1) Ecrire ("Donner la valeur du pas : "), Lire (P)
2) X ← **Valeur_X** (P)
3) A ← 2*X - 2/3*X*Xv
4) Ecrire ("La meilleur solution avec ce pas de variation est pour X = ", X, "l'aire = ", A)
5) **Fin** Rectangle

Tableau de déclaration des Objets

Objets	Type/Nature
P, X, A Valeur_X	Réel Fonction

3. **Spécification de la fonction Valeur_X :**

- **Résultat :** Déterminer la valeur de **X**
- **Traitements :** La solution comporte un traitement répétitif pour parcourir les valeurs du longueur du rectangle avec un pas **Pf** donné. Pour chaque valeur de variation **(Xv)**, on calcule l'aire **(Av)**, enfin sortir de la boucle avec **Xv** pour laquelle l'aire **Av** presque égale à 1.

Cette fonction admet un seul paramètre formel **Pf.**

4. Algorithme de la fonction Valeur_X :

0) **Début fonction** Valeur_X (Pf : réel) **: Réel**
1) [Xv ← 0] **Répéter**
   Xv ← Xv + Pf
   Av ← 2*Xv - 2/3*Xv*Xv
   Jusqu'à (Av >= 1)
2) **Valeur_X** ← Xv
3) **Fin** Valeur_X

Tableau de déclaration des objets locaux

Objets	Type/Nature
Xv, Av	Réel

III. Application : (Résolution de l'équation F(X) = 0)

Activité : Soit une fonction F continue monotone sur un intervalle [a, b], cette fonction ne s'annule qu'une seule fois. Ecrire un programme permettent de calculer et d'afficher le zéro de cette fonction (valeur approché de X telle que F(X) = 0), avec une précision Epsilon. Les valeurs a, b et Epsilon sont des données.

a) Spécifications et algorithmes du problème :

1. Spécification du programme principale :

- **Résultat :** Afficher la valeur de **X** pour laquelle **F(X) = 0**.
- **Traitements :** On doit déterminer le zéro de la fonction **F(X) = 0** sur l'intervalle **[a, b]** avec une précision **Epsilon**, en utilisant une fonction **Valeur_X**
- **Données :** Il faut saisir les valeurs des bornes de l'intervalle **a** et **b** et la valeur de la précision **Epsilon**.

2. Algorithme du programme principal :

0) **Début** Recherche_ZERO
1) Ecrire ("a = "), Lire (a)
2) Ecrire ("b = "), Lire (b)
3) Ecrire ("Donner la valeur de la précision : "), Lire (Epsilon)
4) Ecrire ("La fonction F s'annule pour X = ", **Valeur_X** (a, b, Epsilon))
5) **Fin** Recherche_ZERO

Tableau de déclaration des Objets

Objets	Type/Nature
X, a, b, Epsilon	Réel
Valeur_X	Fonction

3. **Spécification de la fonction Valeur_X :**

- **Résultat :** Déterminer la valeur de **X**
- **Traitements :** Pour déterminer la valeur approchée de **X** à **Epsilonf** précision dans un intervalle **[af, bf]**, on peut utiliser la méthode dichotomique qui consiste à diviser l'intervalle sur 2 soit **mil** et chercher la solution de **mil** par **F**, si **F(mil)** et **F(af)** de même signe alors on cherche la solution dans l'intervalle **[mil,bf]**, sinon dans l'intervalle **[af,mil]** et ainsi de suite jusqu'à ce que **(bf-af)** devient inférieur à **Epsilonf** et **F(mil) = 0**. donc la structure adéquate à utiliser est la boucle TANT QUE … FAIRE.

Cette fonction admet trois paramètres formels **af**, **bf**, **Epsilonf**.

4. Algorithme de la fonction Valeur_X :

```
0) Début fonction Valeur_X (af, bf, Epsilonf : réel) : Réel
1) [mil ← (af + bf)/2]
   Tant Que (F(mil) ≠ 0 ) ET (bf – af > Epsilonf) Faire
      Si (F(af) * F(mil) >0) Alors
            af ← mil
      Sinon
            bf ← mil
      Finsi
      mil ← (af + bf)/2
   Fin Tant Que
2) Valeur_X ← mil
3) Fin Valeur_X
```

Tableau de déclaration des objets locaux

Objets	Type/Nature
mil	Réel

Remarque : Il faut définir la fonction **F** permettant de retourner la solution d'une valeur par la fonction **F(X)**.